المحاضرة الاولى

المصفوفات

تعريف: من أجل أي عددين طبيعيين m و n نضع

$$M = \{1,2,\ldots,m\} \quad \& \quad N = \{1,2,\ldots,n\}$$

تتألف مجموعة الجداء المباشر $M \times N$ من جميع الثنائيات (i,j) التي مركبتها الأولى i من المجموعة الأولى M و مركبتها الثانية j من المجموعة الثانية N، أي أن

$$M \times N = \{(i,j) \ : \ i \in M \quad \& \quad j \in N\}$$

من أجل أي مجموعة غير خالية $S \neq \phi$ نسمي كل تطبيق $A : M \times N \to S$ مصفوفة من المرتبة $m \times n$ معرفة على المجموعة S.

ملاحظة: سنرمز اصطلاحاً للصورة $A(i,j) \in S$ بالرمز $a_{i,j}$، و ذلك من أجل أي ثنائية $(i,j) \in M \times N$. فإذا اعتبرنا أن المصفوفة A هي صف مستطيل من العناصر التي تنتمي إلى المجموعة S و المرتبة ضمن عدد من الأسطر m و عدد من الأعمدة n، يمكننا اعتبار العنصر $a_{i,j}$ هو العنصر الواقع عند تقاطع السطر رقم i و العمود رقم j و تصبح المصفوفة A بالشكل

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

و تجدر الملاحظة هنا إلى أننا سنتعامل خلال دراستنا في هذا المنهاج فقط مع المصفوفات الحقيقية ($S \subseteq \mathbb{R}$) أي أن جميع عناصر المصفوفة هي أعداد حقيقية أو المصفوفات المركبة ($S \subseteq \mathbb{C}$) التي جميع عناصرها أعداداً مركبة.

مثال: نبين فيما يلي بعض الأمثلة لمصفوفات حقيقية و مركبة

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} Sin(\theta) & 0 \\ 0 & Cos(\theta) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ -i & 3+2i \end{pmatrix}$$

ملاحظة: نرمز للمصفوفة عادةً بأحرف لاتينية كبيرة مثل $A,B,C,...$ و لعناصر المصفوفة بأحرف لاتينية صغيرة مثل $a,b,c,...$. و نسمي عناصر المصفوفة من الشكل $a_{i,i}$ عناصر القطر الرئيسي في المصفوفة، أي أن عناصر القطر الرئيسي هي العناصر التي يتساوى دليليها (رقم سطر العنصر يساوي رقم عمود هذا العنصر). كما نسمي مجموع عناصر القطر الرئيسي في أي مصفوفة A أثر هذه المصفوفة و نرمز له بالرمز $Tr(A)$.

و نلاحظ أن العنصر $a_{i,j}$ يقع فوق القطر الرئيسي في المصفوفة إذا و فقط إذا كان $i < j$، أي أن رقم سطره أصغر تماماً من رقم عموده. كما أن العنصر $a_{i,j}$ يقع تحت القطر الرئيسي في المصفوفة إذا و فقط إذا كان $i > j$، أي أن رقم سطره أكبر تماماً من رقم عموده. و قد نستخدم في بعض الأحيان الترميز $A = (a_{i,j})_{m\times n}$ أو اختصاراً $A_{m\times n}$ للدلالة على مصفوفة من المرتبة $m \times n$. كما نسمي في أي مصفوفة $A_{m\times n}$ مجموعة العناصر $a_{i,j}$ التي يتحقق من أجلها أن $i + j = m + 1$ عناصر القطر الثانوي في المصفوفة، أي أن عناصر القطر الثانوي هي العناصر التي يزيد مجموع دليليها بواحد عن عدد أسطر المصفوفة.

مثال: عين المصفوفة $A_{2\times 3}$ و التي تتعرف عناصرها بالعلاقة $a_{i,j} = (i + j)^2$؟

الحل: بعد ملاحظة أن المصفوفة تتألف من سطرين و ثلاثة أعمدة، نعين عناصر هذه المصفوفة بالاعتماد على العلاقة المعطاة كما يلي

$$a_{1,1} = (1+1)^2 = 4 \ , \ a_{1,2} = (1+2)^2 = 9 \ , \ a_{1,3} = (1+3)^2 = 16$$

$$a_{2,1} = (2+1)^2 = 9 \ , \ a_{2,2} = (2+2)^2 = 16 \ , \ a_{2,3} = (2+3)^2 = 25$$

و بالتالي تصبح المصفوفة المطلوبة بالشكل $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{pmatrix}$.

بعض المصفوفات الخاصة:

١. **المصفوفة المستطيلة:** هي كل مصفوفة عدد أسطرها لا يساوي عدد أعمدتها، أي أن $m \neq n$. كالمصفوفات

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

٢. **مصفوفة السطر:** هي كل مصفوفة فيها سطر واحد فقط، أي أنها من المرتبة $1 \times n$. كالمصفوفات

$$(7) \ , \ (-1 \quad 3 \quad 9) \ , \ (2 \quad 0 \quad 5 \quad 7)$$

٣. **مصفوفة العمود:** هي كل مصفوفة فيها عمود واحد فقط، أي أنها من المرتبة $m \times 1$. كالمصفوفات

$$(9) \ , \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

٤. **المصفوفة الصفرية:** هي كل مصفوفة جميع عناصرها أصفاراً. كالمصفوفات

$$(0 \quad 0) \ , \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

٥. **المصفوفة المربعة:** هي كل مصفوفة عدد أسطرها يساوي عدد أعمدتها، أي أن $m = n$ كالمصفوفات

$$(5) \ , \begin{pmatrix} 2 & 15 & 9 \\ 23 & 1 & -2 \\ 52 & -4 & 1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 25 & 77 \end{pmatrix}$$

٦. **المصفوفة المثلثية العليا:** هي كل مصفوفة مربعة جميع عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي أصفاراً، أي أن $a_{i,j} = 0 \ ; \ \forall i > j$ كالمصفوفات

$$(3)\ ,\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & 20 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

٧. **المصفوفة المثلثية الدنيا:** هي كل مصفوفة مربعة جميع عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي أصفاراً، أي أن $a_{i,j}=0\ ;\ \forall i<j$ كالمصفوفات

$$(-6)\ ,\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 32 & 0 \\ 3 & -2 & 80 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

٨. **المصفوفة القطرية:** كل مصفوفة مثلثية عليا و دنيا بآنٍ معاً، أي أنها مصفوفة مربعة جميع عناصرها الواقعة فوق و تحت القطر الرئيسي أصفاراً $a_{i,j}=0\ ;\ \forall i\neq j$ كالمصفوفات

$$(-6)\ ,\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

٩. **المصفوفة السلمية:** كل مصفوفة قطرية عناصر قطرها الرئيسي متساوية، أي أن $a_{i,j}=0\ ;\ \forall i\neq j$ و $a_{i,i}=\lambda\ ;\ \forall i$ حيث أن $\lambda\in\mathbb{R}$ كالمصفوفات

$$(-6)\ ,\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\ ,\ \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

١٠. **المصفوفة الواحدية:** هي مصفوفة سلمية جميع عناصر قطرها الرئيسي تساوي الواحد، أي أن $a_{i,j}=0\ ;\ \forall i\neq j$ و $a_{i,i}=1\ ;\ \forall i$ كالمصفوفات

$$(1)\ ,\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

ملاحظة: سنستخدم الترميز A_n للدلالة على أن المصفوفة مربعة من المرتبة $n \times n$، كما سنرمز للمصفوفة الواحدية من المرتبة $n \times n$ بالرمز I_n و للمصفوفة الصفرية من المرتبة $m \times n$ بالرمز $O_{m\times n}$.

تعريف: نقول أن المصفوفتين $A=\left(a_{i,j}\right)_{m\times n}$ و $B=\left(b_{i,j}\right)_{p\times q}$ متساويتان و نكتب $A=B$ إذا كان لهما نفس المرتبة ($m=p\ ,\ n=q$) و تساوت العناصر المتقابلة في كلتا المصفوفتين. أي أن

$$A=B \quad \Leftrightarrow \quad a_{i,j}=b_{i,j} \quad ; \quad \forall i,j$$

مثال: حل المعادلة التالية

$$\begin{pmatrix}x+3 & 2y-5\\ 3z+1 & z-u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2x & 3\\ -5 & x+5\end{pmatrix}$$

الحل: من المساواة السابقة و حسب تساوي المصفوفات نستنتج المعادلات التالية

$$\begin{cases}x+3=3-2x\\ 2y-5=3\\ 3z+1=-5\\ z-u=x+5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x=0\\ 2y=8\\ 3z=-6\\ u=z-x-5\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=0\\ y=4\\ z=-2\\ u=-7\end{cases}$$

العمليات الجبرية على المصفوفات:

١. **جمع المصفوفات:** لجمع المصفوفتين $A=\left(a_{i,j}\right)$ و $B=\left(b_{i,j}\right)$ يجب أن يكون لهما نفس المرتبة $m \times n$، حيث تؤول عملية جمع المصفوفتين عندئذٍ إلى جمع العناصر المتقابلة في المصفوفتين لنحصل على مصفوفة لها نفس المرتبة $m \times n$، أي أن

$$C=A+B \quad \Leftrightarrow \quad c_{i,j}=a_{i,j}+b_{i,j} \quad ; \quad \forall i,j$$

خواص عملية جمع المصفوفات: تتمتع عملية جمع المصفوفات بالخواص التالية

- عملية جمع المصفوفات هي عملية داخلية، أي أنه إذا كانت A و B مصفوفتان من المرتبة $m \times n$ فإن المصفوفة $A + B$ هي أيضاً مصفوفة من المرتبة $m \times n$.
- عملية جمع المصفوفات هي عملية تبديلية، أي أنه إذا كانت A و B مصفوفتان من المرتبة $m \times n$ فإن $A + B = B + A$.
- عملية جمع المصفوفات هي عملية تجميعية، أي أنه إذا كانت A و B و C مصفوفات من المرتبة $m \times n$ فإن $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- المصفوفة الصفرية O من المرتبة $m \times n$ هي العنصر الحيادي بالنسبة لعملية جمع المصفوفات من المرتبة $m \times n$، أي أن $A + O = O + A = A \ ; \ \forall A$.
- من أجل أي مصفوفة A من المرتبة $m \times n$ توجد مصفوفة نظيرة نرمز لها بالرمز $-A$ و هي المصفوفة الناتجة عن المصفوفة A بعد تغيير إشارات جميع عناصرها، و هذه المصفوفة تحقق أن $A + (-A) = (-A) + A = O$.

و هكذا نستنتج أن مجموعة جميع المصفوفات من المرتبة $m \times n$ تشكل مع عملية جمع المصفوفات زمرة تبديلية.

٢. ضرب مصفوفة بعددٍ سلمي: لتكن $A = (a_{i,j})$ مصفوفة ما و ليكن λ عدداً سلمياً (حقيقياً أو مركباً)، نعرف المصفوفة $C = \lambda A = A\lambda$ بأنها المصفوفة الناتجة عن المصفوفة A بعد ضرب جميع عناصرها بالعدد السلمي λ. أي أن

$$C = \lambda A \quad \Leftrightarrow \quad c_{i,j} = \lambda a_{i,j} \quad ; \quad \forall i, j$$

ملاحظة: لاحظ أن $(-1)A = -A$، و بالتالي يمكن تعريف عملية طرح مصفوفتين $B - A$ من خلال جمع المصفوفة B مع نظيرة المصفوفة A، أي أن $B - A = B + (-A)$.

خواص عملية ضرب مصفوفة بعدد سلمي:

- من أجل أي مصفوفتين A و B من المرتبة $m \times n$ و أي عدد سلمي $\lambda \in \mathbb{C}$ يكون

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B = A\lambda + B\lambda = (A + B)\lambda$$

- من أجل أي مصفوفة A من المرتبة $m \times n$ و أي عددين سلميين $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ يكون

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A \quad \& \quad (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) = \mu(\lambda A)$$

مثال: حل المعادلة التالية

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}X = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

الحل: بإجراء بعض العمليات الجبرية على طرفي المعادلة السابقة نجد أن

$$\frac{1}{2}X = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{2}X = \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ +3 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}X = \begin{pmatrix} 10-4 & -2-5 \\ 1+3 & 4-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow X = 2\begin{pmatrix} 6 & -7 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -14 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

٣. ضرب المصفوفات: من أجل أي مصفوفتين $A_{m\times p}$ و $B_{p\times n}$ نعرف المصفوفة $C = A \cdot B$ بأنها المصفوفة التي يكون فيها العنصر $c_{i,j}$ هو مجموع نواتج عن ضرب كل عنصر من عناصر السطر رقم i من المصفوفة A بمقابلاتها في العمود رقم j من المصفوفة B. أي أن

$$c_{i,j} = a_{i,1}\ b_{1,j} + a_{i,2}\ b_{2,j} + + a_{i,p}\ b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}\ b_{k,j} \quad ; \quad \forall i, j$$

لاحظ أن عملية الضرب تكون معرفة إذا و فقط إذا كان عدد أعمدة المصفوفة A مساوٍ لعدد أسطر المصفوفة B و أن $C_{m\times n} = A_{m\times p} \cdot B_{p\times n}$.

ملاحظة: لاحظ أنه إذا كانت $n \neq m$ فإن الجداء $B \cdot A$ غير معرف (غير موجود) مع أن الجداء $A \cdot B$ معرف، و نستنتج من ذلك أن عملية ضرب المصفوفات هي عملية غير تبديلية.

مثال: إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$، بين فيما إذا كانت الجداءات $A \cdot B$ و $B \cdot A$ موجودة ثم أوجد ناتج الجداء إذا كان ممكناً ؟

الحل: بما أن A من المرتبة 2×2 و B من المرتبة 2×3، فإن الجداء $A\cdot B$ موجود إلا أن الجداء $B\cdot A$ غير موجود. و سنقوم الآن بحساب الجداء $A\cdot B$ كما يلي

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\times 3+1\times 1 & 2\times 2+1\times 0 & 2\times(-1)+1\times 4\\ 3\times 3+2\times 1 & 3\times 2+2\times 0 & 3\times(-1)+2\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4 & 2\\ 11 & 6 & 5\end{pmatrix}$$

خواص عملية ضرب المصفوفات:

- من أجل أي ثلاثة مصفوفات $A_{m\times p}$ و $B_{p\times q}$ و $C_{q\times n}$ يكون

$$A_{m\times p}\cdot\left(B_{p\times q}\cdot C_{q\times n}\right)=\left(A_{m\times p}\cdot B_{p\times q}\right)\cdot C_{q\times n}$$

- من أجل أي مصفوفات $A_{m\times p}$ و $B_{p\times n}$ و $C_{p\times n}$ و $D_{m\times p}$ يكون

$$\begin{cases}A_{m\times p}\cdot\left(B_{p\times n}+C_{p\times n}\right)=A_{m\times p}\cdot B_{p\times n}+A_{m\times p}\cdot C_{p\times n}\\ \left(A_{m\times p}+D_{m\times p}\right)\cdot B_{p\times n}=A_{m\times p}\cdot B_{p\times n}+D_{m\times p}\cdot B_{p\times n}\end{cases}$$

- من أجل أي مصفوفة $A_{m\times n}$ يكون

$$I_m\cdot A_{m\times n}=A_{m\times n}\cdot I_n=A_{m\times n}$$

- من أجل أي مصفوفتين $A_{m\times p}$ و $B_{p\times n}$ يكون

$$\lambda\left(A_{m\times p}\cdot B_{p\times n}\right)=\left(\lambda A_{m\times p}\right)\cdot B_{p\times n}=A_{m\times p}\cdot\left(\lambda B_{p\times n}\right)$$

ملاحظة: من أجل أي مصفوفة مربعة A يكون الجداء $A\cdot A$ معرفاً و موجوداً دائماً و نرمز له بالرمز A^2.
و بنفس الأسلوب يمكن أن نعرف القوى $A^3, A^4, \ldots$ للمصفوفة A التي تحقق الخواص التالية

$$A^p\cdot A^q=A^{p+q}\quad,\quad\left(A^p\right)^q=A^{pq}=\left(A^q\right)^p$$

مثال: إذا كانت $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$، فأثبت أن $A^2-4A-5I=O$؟

الحل: نلاحظ أن

$$A^2=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+4+4&2+2+4&2+4+2\\2+2+4&4+1+4&4+2+2\\2+4+2&4+2+2&4+4+1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A^2=\begin{pmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{pmatrix}$$

و بالتعويض في الطرف الأيسر من المعادلة المعطاة نجد

$$A^2-4A-5I=\begin{pmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9&8&8\\8&9&8\\8&8&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&-8&-8\\-8&-4&-8\\-8&-8&-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5&0&0\\0&-5&0\\0&0&-5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}9-4-5&8-8+0&8-8+0\\8-8+0&9-4-5&8-8+0\\8-8+0&8-8+0&9-4-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O$$

تعريف (منقول مصفوفة): من أجل أي مصفوفة A نسمي المصفوفة A^T الناتجة عن المصفوفة A بعد المبادلة بين أسطر المصفوفة و أعمدتها منقول المصفوفة A.

لاحظ أنه إذا كانت المصفوفة A من المرتبة $m\times n$ فإن المصفوفة A^T تكون من المرتبة $n\times m$. كما أنه من أجل أي مصفوفتين $A_{m\times p}$ و $B_{p\times m}$ و أي عدد سلمي λ يكون

$$\left(A^T\right)^T = A \ , \ (\lambda A)^T = \lambda A^T \ , \ (A+B)^T = A^T + B^T \ , \ (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

تعريف: نقول عن مصفوفة مربعة $A = \left(a_{i,j}\right)$ أنها متناظرة إذا و فقط إذا كانت $A^T = A$، أي أن $a_{i,j} = a_{j,i} \ ; \ \forall i,j$. كما نقول أن المصفوفة متناظرة عكسياً إذا و فقط إذا كان $A^T = -A$، أي أن $a_{i,j} = -a_{j,i} \ ; \ \forall i,j$.

مثال (٦): أوجد منقول المصفوفات التالية ثم بين فيما إذا كانت متناظرة أو متناظرة عكسياً

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} , \ B = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} , \ C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} , \ D = \begin{pmatrix} 0 & 9 & -1 \\ -9 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

الحل: نبادل بين أسطر و أعمدة كل مصفوفة لإيجاد منقولها فنجد

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, C^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 4 \\ 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, D^T = \begin{pmatrix} 0 & -9 & 1 \\ 9 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

و بالتالي نلاحظ أن A و C ليست مصفوفات متناظرة و ليست متناظرة عكسياً لكونها مصفوفات مستطيلة (غير مربعة). كما أن $B^T = B$ و $D^T = -D$ و بالتالي فإن B هي مصفوفة متناظرة أما D فهي مصفوفة متناظرة عكسياً.

نتائج:

١. عناصر القطر الرئيسي في أي مصفوفة متناظرة عكسياً يجب أن تكون معدومة.
٢. كل مصفوفة قطرية هي مصفوفة متناظرة.
٣. المصفوفات الصفرية المربعة هي فقط المصفوفات المتناظرة و المتناظرة عكسياً بآنٍ معاً.
٤. من أجل أي مصفوفة مربعة A تكون المصفوفة $A^+ = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ متناظرة و تكون المصفوفة $A^- = \frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$ متناظرة عكسياً (أثبت ذلك). و بالتالي يمكن و بشكلٍ وحيد تحليل المصفوفة A إلى مجموع مصفوفتين إحداهما متناظرة و الأخرى متناظرة عكسياً بالشكل $A = A^+ + A^-$.

ملاحظة: تتمتع عملية ضرب الأعداد السلمية (حقيقية أو مركبة) بالخاصتين التاليتين

- إذا كان $a \cdot b = 0$، فإما أن يكون $a = 0$ أو أن يكون $b = 0$.
- إذا كان $a \cdot b = a \cdot c$ أو $b \cdot a = c \cdot a$ و كان $a \neq 0$، فإن $b = c$.

أما عملية الضرب المعرفة على المصفوفات فلا تحقق هاتين الخاصتين، فإذا وضعنا

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

نلاحظ أن $B \cdot A = O$ مع أن $A \neq O$ و $B \neq O$. كذلك إذا وضعنا

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

فنلاحظ أن $A \cdot B = A \cdot C = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 16 & 10 \end{pmatrix}$ مع أن $B \neq C$.

تعريف: نقول عن مصفوفة مربعة A_n أنها عمودية إذا كان $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n$.

مثال: يمكن بسهولة إثبات أن المصفوفة التالية هي مصفوفة عمودية

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Cos(\theta) & -Sin(\theta) \\ 0 & Sin(\theta) & Cos(\theta) \end{pmatrix} \quad ; \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

تعريف: نقول عن مصفوفة A أنها متدرجة الأسطر إذا حققت الشروط التالية

١. الأسطر الصفرية في المصفوفة (إن وجدت) فهي الأسطر الأخيرة في المصفوفة
٢. في كل سطر يحوي عنصراً غير معدوم يكون العنصر الأول غير المعدوم من اليسار في هذا السطر مساوياً للواحد، و نسمي هذا العنصر بالعنصر المتقدم في هذا السطر.
٣. من أجل أي سطرين متتاليين i و $i+1$ يحوي كل منهما عنصراً متقدماً يقع العنصر المتقدم في السطر $i+1$ على يمين (و ليس تحت) العنصر المتقدم من السطر i.

و إذا تحققت الشروط السابقة و كانت جميع عناصر أي عمود في المصفوفة يحوي عنصراً متقدماً من سطرٍ ما معدومة باستثناء العنصر المتقدم، قلنا أن المصفوفة متدرجة الأسطر بشكلٍ مختصر أو اختصاراً مصفوفة مختصرة.

مثال: في المصفوفات التالية

$$A=\begin{pmatrix}1&3&0&2&-4&4\\0&1&0&3&4&6\\0&0&0&1&5&-2\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&0&0&2\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&2&0&0&1\\0&0&1&2&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

المصفوفتان A و C متدرجتا الأسطر، إضافةً إلى كون المصفوفة C متدرجة الأسطر بشكلٍ مختصر (مصفوفة مختصرة).

مسائل غير محلولة - مصفوفات

تمرين (١): أثبت أنه إذا كانت A و B مصفوفتان مربعتان من نفس المرتبة و متبادلتان (أي أن $A\cdot B=B\cdot A$)، فإن $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$؟

تمرين (٢): إذا كانت $A=\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ عندئذٍ أوجد المصفوفة B التي تحقق أن $A\cdot B=I$، ثم تحقق من أن $B\cdot A=I$؟

تمرين (٣): إذا كانت $A=\begin{pmatrix}3&1\\7&5\end{pmatrix}$ عندئذٍ عين قيم الأعداد x و y التي يتحقق من أجلها أن $A^2+x\ I=y\ A$؟

تمرين (٤): إذا كانت $A(\alpha)=\begin{pmatrix}Cos(\alpha)&Sin(\alpha)\\-Sin(\alpha)&Cos(\alpha)\end{pmatrix}$ عندئذٍ أثبت أن $A(\alpha)\cdot A(\beta)=A(\beta)\cdot A(\alpha)=A(\alpha+\beta)$، و استنتج أن $A^2(\alpha)=A(2\alpha)$؟

تمرين (٥): حل المعادلة التالية $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$؟

تمرين (٦): عين المصفوفة B من المرتبة 2×2 و التي تحقق المعادلة التالية

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$

تمرين (٧): إذا كانت $A_{2\times 3}$ و $B_{3\times 3}$ و $C_{4\times 3}$ و $D_{3\times 2}$ عندئذٍ بين مرتبة كلٍ من المصفوفات التالية $A \cdot B \ , \ B \cdot D \ , \ A \cdot D \ , \ C \cdot B \ , \ D \cdot (A \cdot B)$؟

تمرين (٨): إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ عندئذٍ أوجد $A \cdot B$ و $B \cdot A$؟

تمرين (٩): إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ عندئذٍ أوجد كلاً من المصفوفتين $A \cdot B$ و $B \cdot A$؟

تمرين (١٠): إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ عندئذٍ أثبت أن $A^2 - 5A + I = O$؟

تمرين (١١): إذا كانت $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ و كان $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ عندئذٍ أوجد A^2 و A^3 ثم عين قيمة $f(A)$؟ (**إرشاد:** لاحظ أن $f(A) = 2A^3 - 4A + 5I$)

تمرين (١٢): عين المصفوفة A التي تحقق المعادلة التالية

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & -2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{pmatrix}$$

تمرين (١٣): إذا كانت $f(x) = \begin{pmatrix} Cos(x) & -Sin(x) & 0 \\ Sin(x) & Cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ عندئذٍ أثبت أن

$$f(x)\cdot f(y) = f(x+y) \quad \& \quad f(x)\cdot f(-x) = I$$

تمرين (١٤): إذا كانت A مصفوفة ما، أثبت أن المصفوفتين $A\cdot A^T$ و $A^T\cdot A$ متناظرتين؟

تمرين (١٥): إذا كانت A و B مصفوفتين متناظرتين فأثبت أن المصفوفة $A\cdot B$ تكون متناظرة إذا و فقط إذا كانت $A\cdot B = B\cdot A$؟

تمرين (١٦): إذا كانت A و B مصفوفتين متناظرتين فأثبت أن المصفوفة $A\cdot B - B\cdot A$ هي مصفوفة متناظرة عكسياً؟

تمرين (١٧): إذا كانت A مصفوفة متناظرة عكسياً فأثبت أن $A\cdot A^T = A^T\cdot A$ و أن المصفوفة A^2 هي مصفوفة متناظرة؟

تمرين (١٨): مثل كلاً من المصفوفات التالية على شكل مجموع لمصفوفتين إحداهما متناظرة و الأخرى متناظرة عكسياً

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$